Harada's conjecture on character degrees and class sizes : symmetric and alternating groups (Research on algebraic combinatorics and representation theory of finite groups and vertex operator algebras)

飛田, 明彦

数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 144-153

Harada's conjecture on character degrees and class sizes — symmetric and alternating groups —

Akihiko Hida (Faculty of Education, Saitama University)
飛田明彦 (埼玉大学教育学部)

1 Introduction

G を有限群, $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_s\}$ を G の共役類の全体, $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_s\}$ を G の通常既約指標の全体の集合とする。ここでは共役類の大きさ $|C_i|$ と指標の次数 $\chi_i(1)$ の関係について考察する。まず, これらは, G の位数 $|G|$ の約数である。

$$|C_i| \mid |G|, \quad \chi_i(1) \mid |G|$$

また, 和（あるいは 2 乗の和）が $|G|$ となる。

$$\sum_{i=1}^{s} |C_i| = |G| = \sum_{i=1}^{s} \chi(1)^2$$

G の中心 $Z(G)$ や交換子群 G' の位数に関して, 次の関係が知られている [3, Theorem 4]。

$$\chi_i(1) \mid |G/Z(G)| \mid \prod_{i=1}^{s} |C_i|, \quad |G'| \mid \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

さらに, 共役類の大きさの積と指標の次数の積について, 原田耕一郎氏による次の予想 [3, Conjecture II] がある。

Conjecture 1.1 (Harada). 有限群 G に対して, 共役類の大きさの積と指標の次数の積の比

$$h(G) = \frac{\prod_{i=1}^{s} |C_i|}{\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1)}$$

は整数である。

この数 $h(G)$ と, G の構造や位数との関係は興味深いものであるが, 交換子群の位数との関係について千吉良直紀氏による次の予想がある。

Conjecture 1.2 (Chigira)**.** $|G'|$ は $h(G)$ の約数である。

Example 1.3. (1) $G = S_3$ を 3 次対称群とする。共役類の大きさは $1, 2, 3$, 指標の次数は $1, 1, 2$ であり,

$$h(S_3) = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 1 \times 2} = 3$$

となる。また, $|S_3'| = |A_3| = 3$ は $h(S_3)$ の約数となっている。
(2) $G = A_4$ を 4 次交代群とする。共役類の大きさは $1, 3, 4, 4$, 指標の次数は $1, 1, 1, 3$ であり,

$$h(A_4) = \frac{1 \times 3 \times 4 \times 4}{1 \times 1 \times 1 \times 3} = 16$$

となる。また $|A_4'| = 4$ は $h(A_4)$ の約数である。

Conjecture 1.1 には清田正夫氏による様々な細分化がある [8]。p-ブロックの理論を経由することにより次の結果が得られている。

Theorem 1.4 (Kiyota)**.** G のすべての Sylow 部分群が可換ならば, Conjecture 1.1 が成立する。

本稿では, 対称群と交代群に対して Conjecture 1.1, 1.2 が成立することを報告する。次が主定理である。

Theorem 1.5. 対称群 S_n と交代群 A_n に対して Conjecture 1.1, 1.2 が成り立つ。
(1) $h(S_n)$ は整数であり, $n \geq 4$ に対しては

$$|A_n|^{n-3} \mid h(S_n)$$

となる。
(2) $h(A_n)$ は整数であり, $n \geq 5$ に対しては

$$|A_n|^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \mid h(A_n)$$

となる。

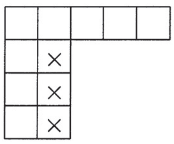
以下, 第 2 章では対称群について述べる。対称群の場合の証明は, 非常によく知られた分割恒等式からすぐに得られ, 結果は非常に簡明である。第 3 章では交代群について述べる。第 4 章では p-群に関するある結果を紹介する。

2 対称群

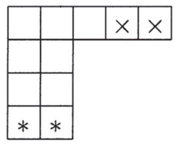
$\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l)$ を自然数 n の分割とする。つまり, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$$

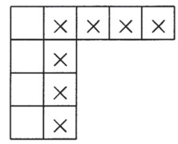
とする。λ での i の重複度を m_i とおき, $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ とも表す。$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を λ の parts と呼ぶ。分割 λ とその Young 図形を同一視して扱う。 λ の Young 図形における hook を考える。hook が arm を持たないとき vertical hook と呼び, leg を持たないとき horizontal hook と呼ぶことにする。さらに, arm と leg の両方を持つとき, つまり vertical でもなく horizontal でもない hook を proper hook と呼ぶ。



vertical hook の例



horizontal hook の例



proper hook の例

分割 λ に対して,

$$\mathbf{part}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} \lambda_i = \prod_{i=1}^{\lambda_1} i^{m_i}$$

$$\mathbf{verh}(\lambda) = \prod_{i=1}^{\lambda_1} m_i!$$

$$\mathbf{horh}(\lambda) = \mathbf{verh}(\lambda')$$

とおく。つまり, $\mathbf{part}(\lambda)$ は λ の parts の積, $\mathbf{verh}(\lambda)$ は vertical hook の長さの積, $\mathbf{horh}(\lambda)$ は horizontal hook の長さの積である。さらに, $h(\lambda)$ を λ のすべての hook の長さの積, $\hat{h}(\lambda)$ を λ の proper hook の長さの積とする。よって,

$$h(\lambda) = \hat{h}(\lambda)\mathbf{verh}(\lambda)\mathbf{horh}(\lambda)$$

が成り立つ。

$\mathbf{P}(n)$ を n の分割全体の集合とし, $p(n) = |\mathbf{P}(n)|$ とおく。S_n の共役類は n の分割と対応する。$\lambda \in \mathbf{P}(n)$ に対応する共役類を C_λ で表すと,

$$|C_\lambda| = n!/\mathbf{part}(\lambda)\mathbf{verh}(\lambda)$$

である。一方, S_n の既約指標も n の分割に対応し, λ に対応する指標を χ^λ で表すと,

$$\chi^\lambda(1) = n!/h(\lambda)$$

である。

$$\mathbf{Part}(n,k) = \{(\lambda, i) \mid \lambda \in \mathbf{P}(n),\ \lambda_i = k\}$$

$$\mathbf{Horh}(n,k) = \{\text{horaizontal } k\text{-hook in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{P}(n)\}$$

とおくと, 次の全単射が知られている。

Proposition 2.1. 次の全単射が存在する。

$$\mathbf{Part}(n,k) \longrightarrow \bigcup_{i\geq 1} \mathbf{P}(n-ik) \longrightarrow \mathbf{Horh}(n,k)$$

これより次が得られる。

Corollary 2.2.

$$\prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} \mathbf{part}(\lambda) = \prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} \mathbf{horh}(\lambda) = \prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} \mathbf{verh}(\lambda)$$

Remark 2.3. (1) $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ の表記を用いれば, Corollary 2.2 は

$$\prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} (1^{m_1}2^{m_2}\cdots) = \prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} (m_1!m_2!\cdots)$$

と表され, この等式はよく知られている（例えば, [1], [5], [9], [10]）。
(2) さらに, k-hook の個数について,

$$|\{k\text{-hooks in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{P}(n)\}| = k|\mathbf{Part}(n,k)|$$
$$|\{\text{proper } k\text{-hooks in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{P}(n)\}| = (k-2)\sum_{i\geq 1} p(n-ik)$$

が成り立つ [9, p.16, Example 12]。

対称群の場合, Theorem 1.5 (1) は Corollary 2.2 から容易に導かれる。

Proof of Theorem 1.5 (1)

Corollary 2.2 より,

$$\begin{aligned} h(S_n) &= \frac{\prod(n!/\mathbf{part}(\lambda)\mathbf{verh}(\lambda))}{\prod(n!/h(\lambda))} \\ &= \frac{\prod \hat{h}(\lambda)\mathbf{verh}(\lambda)\mathbf{horh}(\lambda)}{\prod \mathbf{part}(\lambda)\mathbf{verh}(\lambda)} \\ &= \prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} \hat{h}(\lambda) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

である。つまり, $h(S_n)$ は n の分割すべてに渡る proper hook の長さの積である。また, $3 \leq k \leq n$ に対して, Remark 2.3 より,

$$|\{\text{proper } k\text{-hooks in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{P}(n)\}| = (k-2)(p(n-k)+\cdots) \geq n-3$$

であり,

$$k^{n-3} \mid \prod_{\lambda\in\mathbf{P}(n)} \hat{h}(\lambda)$$

となるので

$$|A_n|^{n-3} \mid h(S_n)$$

が得られる。

3 交代群

n の分割の集合 $\mathbf{P}(n)$ の部分集合を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbf{P}^{ev}(n) &\iff \lambda \text{ の even parts の個数は even} \\
\lambda \in \mathbf{P}^{od}(n) &\iff \lambda \text{ の even parts の個数は odd} \\
\lambda \in \mathbf{SP}(n) &\iff \lambda \text{ の parts はすべて異なる奇数} \\
\lambda \in \mathbf{SA}(n) &\iff \lambda = \lambda'
\end{aligned}$$

$|\mathbf{SA}(n)| = |\mathbf{SP}(n)|$ でありこれを s_n とおく。交代群の共役類については,

- $C_\lambda \subset A_n \iff \lambda \in \mathbf{P}^{ev}(n)$
- C_λ が A_n で 2 つの共役類に分かれる $\iff \lambda \in \mathbf{SP}(n)$

であり,

$$|\operatorname{Cl}(A_n)| = |\mathbf{P}^{ev}(n)| + s_n$$

となることがわかる。また, 交代群の指標については,

- $\lambda \notin \mathbf{SA}(n)$ のときは, $\chi^\lambda|_{A_n} = \chi^{\lambda'}|_{A_n} \in \operatorname{Irr}(A_n)$
- $\lambda \in \mathbf{SA}(n)$ のときは $\chi^\lambda|_{A_n}$ は 2 つの既約指標の和

となることから,

$$|\operatorname{Irr}(A_n)| = \frac{1}{2}(p(n) + 3s_n)$$

がわかる。共役類の個数と既約指標の個数を比較して, 次の良く知られた等式 [2, Exercises 44] を得る。

Proposition 3.1.

$$|\mathbf{P}^{ev}(n)| - |\mathbf{P}^{od}(n)| = s_n$$

次に,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Part}^{ev}(n,k) &= \{(\lambda, i) \mid \lambda \in \mathbf{P}^{ev}(n),\ \lambda_i = k\} \\
\mathbf{Verh}^{od}(n,k) &= \{\text{vertical } k\text{-hooks in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{P}^{od}(n)\} \\
\mathbf{HookSA}(n,k) &= \{k\text{-hooks in } \lambda \mid \lambda \in \mathbf{SA}(n)\}
\end{aligned}$$

とおく。このとき, Proposition 3.1 を用いて次が得られる。

Theorem 3.2. $k \geq 2$ に対して,

$$|\mathbf{Part}^{ev}(n,k)| - |\mathbf{Verh}^{od}(n,k)| = \sum_{j \geq 1,\ j \equiv k \bmod 2} s_{n-kj} \leq |\mathbf{HookSA}(n,k)|$$

が成り立つ。

この不等式より, 次が得られる。

Corollary 3.3.

$$L_n := \frac{\prod_{\lambda \in \mathbf{P}^{od}(n)} \mathbf{verh}(\lambda) \prod_{\lambda \in \mathbf{SA}(n)} h(\lambda)}{\prod_{\lambda \in \mathbf{P}^{ev}(n)} \mathbf{part}(\lambda)}$$

は整数である。

Proof of Thorem 1.5 (2) の概略

$$\Big(\prod_{\lambda \in \mathbf{P}(n) \setminus \mathbf{SA}(n)} \hat{h}(\lambda)\Big)^{1/2} \cdot \prod_{\lambda \in \mathbf{SA}(n)} \big((\text{non-diagonal proper hook in } \lambda \text{ の長さの積}) \cdot \mathbf{verh}(\lambda)\big)$$

を M_n とおく。これは整数であり,

$$h(A_n) = L_n \cdot M_n$$

となることがわかる。Corollary 3.3 より L_n も整数であるから $h(A_n) \in \mathbb{Z}$ が成り立つ。また, $3 \leq k \leq n$ に対して,

$$k^{[\frac{n-3}{2}]} \mid M_n$$

が成り立つので,

$$|A_n|^{[\frac{n-3}{2}]} \mid M_n \mid h(A_n)$$

が得られる。

Remark 3.4. (1) $n \geq 4$ とする。$n-1$ が素数であるか, あるいは$n=5$ ならば,

$$|A_n|^{n-3} \,\|\, h(S_n)$$

である。ここで, $x^k \| y$ は, $x^k \mid y$ かつ $x^{k+1} \nmid y$ を意味することとする。
(2) $n \geq 5$ とする。n または $n-1$ が素数ならば,

$$|A_n|^{[\frac{n-3}{2}]} \,\|\, h(A_n)$$

である。

Example 3.5.

$$h(S_5) = |A_5|^2 \times 5, \quad h(A_5) = |A_5| \times 2^2$$

$$h(S_6) = |A_6|^3 \times 2^3 \times 3^2, \quad h(A_6) = |A_6| \times 2^3 \times 3^4$$

これは上記 Remark に当てはまる場合である。Remark に当てはまらない場合としては,

$$|A_7|^5 \,\|\, h(S_7), \quad |A_9|^5 \,\|\, h(A_9)$$

などがある。

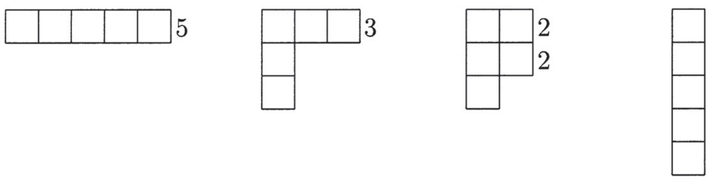
最後に, Theorem 3.2 と Proof of Theorem 1.5 (2) の具体例として, $n=5$ の場合を述べる。

Example 3.6. $n=5$ とする。

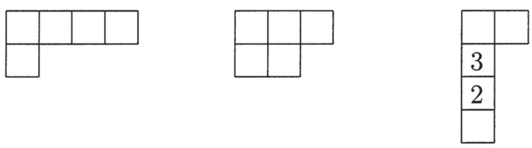
$$\mathbf{P}^{ev}(5)=\{(5),(31^2),(2^21),(1^5)\},\quad \mathbf{P}^{od}(5)=\{(41),(32),(21^3)\},\quad \mathbf{SA}(5)=\{(31^2)\}$$

であり, それぞれの Young 図形は

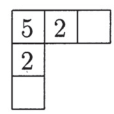
$\mathbf{P}^{ev}(5)$



$\mathbf{P}^{od}(5)$



$\mathbf{SA}(5)$



となる。記された数は, $\mathbf{P}^{ev}(5)$ では parts を, $\mathbf{P}^{od}(5)$ では vertical hook の長さを, $\mathbf{SA}(5)$ では hook の長さを表している。数 1 は省略している。このとき,

k	$\lvert\mathbf{Part}^{ev}(5,k)\rvert$	$\lvert\mathbf{Verh}^{od}(5,k)\rvert$	$\displaystyle\sum_{j\geq 1,\ j\equiv k \bmod 2} s_{n-kj}$	$\lvert\mathbf{HookSA}(n,k)\rvert$
2	2	1	$s_{5-2\times 2}=s_1=1$	2
3	1	1	$s_{5-3}=s_2=0$	0
5	1	0	$s_{5-5}=s_0=1$	1

となり, Theorem 3.2 の不等式

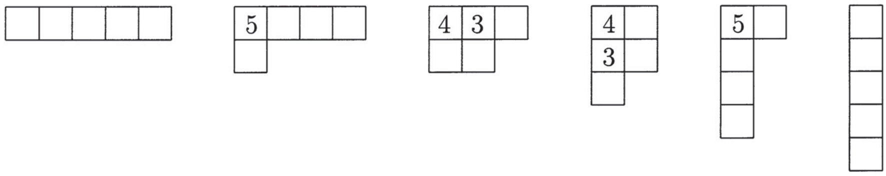
$$|\mathbf{Part}^{ev}(n,k)|-|\mathbf{Verh}^{od}(n,k)|=\sum_{j\geq 1,\ j\equiv k \bmod 2} s_{n-kj}\leq |\mathbf{HookSA}(n,k)|$$

が成り立っていることがわかる。また, Corollary 3.3 の L_n については,

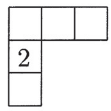
$$L_5=\frac{2^3\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 3\cdot 5}=2$$

となる。次に $\mathbf{P}(5)\backslash\mathbf{SA}(5)$ と $\mathbf{SA}(5)$ をみると,

$\mathbf{P}(5) \backslash \mathbf{SA}(5)$



$\mathbf{SA}(5)$



記された数は $\mathbf{P}(5) \backslash \mathbf{SA}(5)$ では proper hook の長さを, $\mathbf{SA}(5)$ では vertical hook の長さを表している。また, $\mathbf{SA}(5)$ には non-diagonal な proper hook は存在しない。これより, Proof of Thorem 1.5 (2) の M_n については

$$M_5 = (3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 2 = 120$$

となり,

$$h(A_5) = L_5 \cdot M_5 = 2 \cdot 120 = 240$$

が得られる。

4 p-群に関する注意

p を素数とし, G を有限 p-群とする。このとき, 共役類の大きさと既約指標の次数はどちらも p のべきであるから, Conjecture 1.1 は不等式

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

と同値となる。 ここで p-群の共役類に関する次の条件を考える。

$$\left(\frac{|G|}{s}\right)^s \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|^2 \qquad (*)$$

左辺は $|C_i|$ の平均の積である。

Remark 4.1. 一般に

$$\frac{|G|}{s} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \chi_i(1)^2}{s} \geq \Big(\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1)^2\Big)^{1/s}$$

であるから, 条件 $(*)$ が成り立てば,

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \leq \left(\frac{|G|}{s}\right)^{s/2} \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

が成り立ち, Conjecture 1.1 が成り立つ。

この条件 $(*)$ の成り立つ p-群はどれぐらいあるのだろうか。

Proposition 4.2. G を共役類の大きさが 2 種類であるような p-群とすると, 条件 $(*)$ が成り立つ。

Proof. $Z(G)$ を G の中心とする。$|G/Z(G)| = p^m$, $|Z(G)| = p^n$ とし, 任意の $g \in G \backslash Z(G)$ に対して, g の共役類の大きさを p^r とする。このとき, $Z(G) < C_G(g)$ より $n < m+n-r$, つまり $r < m$ である。大きさが p^r の共役類の個数を t とすると

$$t = p^{m+n-r} - p^{n-r}$$

であり,

$$s = p^n + t = p^n + p^{m+n-r} - p^{n-r} \geq p^{m+n-r}$$

となる。よって

$$p^{(m+n)s} \leq (p^{m+n-r})^s (p^{2r})^t$$

つまり,

$$(m+n)s \leq (m+n-r)s + 2rt = (m+n-r)s + 2r(s-p^n)$$

を示せばよい。整理すると,

$$2p^n \leq s$$

となるが, $r < m$ より

$$2p^n \leq p^{n+1} \leq p^{m+n-r} \leq s$$

であるからこれは成立する。 $\square$

Remark 4.3. (1) 共役類の大きさが 2 種類である p-群については, Conjecture 1.2 も成り立つことがわかる。また, G を p-群とは限らない一般の有限群で, 共役類の大きさが 2 種類であるとする。このとき, G はある素数 p について, p-群と可換群の直積となる [6]。よって, この場合にも Conjecture 1.1, 1.2 が成り立つ。

(2) (Kiyota) 共役類の大きさが 2 種類である p-群の例としては, $|G'| = p$ となる群（例えば, extra special p-群）がある。p-群でない一般の有限群に対しても, G' が素数位数ならば（共役類の大きさは 2 種類とは限らないが） Conjecture 1.1, 1.2 が成り立つ。

謝辞

安部利之さんをはじめ、お世話になりました関係の方々に感謝します。

参考文献

[1] 安東雅訓, 制限分割の数え上げ, 数学セミナー, 2017 年 2 月号, 18-22, 日本評論社.

[2] G. E. Andrews and K. Eriksson, Integer partitions, Cambridge University Press, (2004).

[3] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, to appear in Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica, (2018).

[4] A. Hida, The character degree product and the conjugacy length product for symmetric groups, preprint.

[5] A. H. M. Hoare, An involution of blocks in the partitions of n, Amer. Math. Monthly **93** (1986), 475-476.

[6] N. Ito, On finite groups with given conjugate types I, Nagoya Math. J. **6** (1953), 17-28.

[7] G. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley Publishing Company, (1981).

[8] M. Kiyota, Harada Conjecture II and its block refinement, 数理解析研究所講究録, 掲載予定, (2018).

[9] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Second edition, Oxford Mathematical Monographs, (1995).

[10] F. W. Schmidt and R. Simion, On a partition identity, J. Combinatorial Theory, Ser. A **36** (1984), 249-252.